

Model 3 test admitere AC - 2021

1. Ultima cifră a numărului $1! + 2! + \dots + 2021!$ este:

- (a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) 3.

Soluție. Să remarcăm că toate numerele de forma $n!$ cu $n \geq 5$ au ultima cifră 0. Rezultă că ultima cifră căutată este ultima cifră a numărului $1! + 2! + 3! + 4!$, adică 3.

Răspuns corect: (d). □

2. Se notează cu x_1 și x_2 rădăcinile ecuației de gradul al doilea $x^2 - 2x + 2 = 0$. Atunci x_1 și x_2 satisfac relația:

(a) $x_1 + x_2 = -2$; (b) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -1$;

(c) $x_1^2 + x_2^2 = -1$; (d) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 0$.

Soluție. Se observă că $S = x_1 + x_2 = 2$, $P = x_1 x_2 = 2$. Atunci $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = 0$,
 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{S}{P} = 1$, $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{P^2} = 0$.

Răspuns corect: (d). □

3. Mulțimea tuturor soluțiilor reale ale inecuației $\frac{x+1}{x-1} \geq 2021$ este:

(a) $\left(1, \frac{2022}{2020}\right]$; (b) $\left(-\infty, \frac{2022}{2020}\right]$; (c) $\left[\frac{2022}{2020}, \infty\right)$; (d) $\left[1, \frac{2022}{2020}\right]$.

Soluție. În primul rând, remarcăm că $x \neq 1$. Inecuația este echivalentă cu

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-1} - 2021 &\geq 0, \\ \frac{2022 - 2020x}{x-1} &\geq 0 \end{aligned}$$

Răspuns corect: (a). □

4. Soluțiile ecuației

$$5^{2x-3} - 5^x - 5^{x-3} + 1 = 0$$

sunt:

- (a) 0 și $\log_5 3$; (b) $\log_3 5$ și 0; (c) 0 și 2; (d) 0 și 3.

Soluție. Ecuația se rescrie echivalent sub forma

$$(5^x - 1)(5^{x-3} - 1) = 0,$$

având soluțiile 0 și 3. Se putea face și verificare directă.

Răspuns corect: (d). □

5. Mulțimea M a tuturor soluțiilor inecuației $3^{(\log_3 x)^3} \leq x$ este:

(a) $M = \left[\frac{1}{3}, 1\right) \cup [3, +\infty)$; (b) $M = (1, 3)$;

(c) $M = \left(0, \frac{1}{3}\right] \cup [1, 3]$; (d) $M = \emptyset$.

Soluție. Condiția de existență a logaritmului este $x > 0$. Logaritmând inecuația în baza 3, care este supraunitară, obținem

$$(\log_3 x)^3 \leq \log_3 x.$$

Notăm $\log_3 x = y$ și avem de rezolvat $y^3 - y \leq 0$, adică $y \in (-\infty, -1] \cup [0, 1]$, ceea ce conduce la $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right] \cup [1, 3]$.

Răspuns corect: (c). □

6. Într-o progresie aritmetică primul termen este 1, iar produsul primilor 2020 termeni este 0. Cea mai mare valoare posibilă a sumei primilor 2020 termeni este:

(a) 0; (b) 1010; (c) 2020; (d) 2021.

Soluție. Enunțul problemei ne asigură că unul dintre termeni este 0. Cum

$$a_n = 1 + (n - 1)r$$

trebuie să fie 0, deducem că rația este negativă. Atunci suma este maximă atunci când termenii progresiei sunt cei mai mari posibili, ceea ce înseamnă că termenul a_{2020} este 0. Deci $a_{2020} = 1 + 2019r = 0$, de unde $r = -\frac{1}{2019}$.

Suma căutată are formula

$$S = na_1 + \frac{(n-1)n}{2}r,$$

iar pentru $a_1 = 1$, $n = 2020$ și $r = -\frac{1}{2019}$ obținem $S = 1010$.

Răspuns corect: (b). □

7. Termenul care nu îl conține pe x din dezvoltarea $\left(\sqrt[6]{\frac{1}{x}} + \sqrt[10]{x}\right)^8$ are valoarea:

(a) 28; (b) 56; (c) 8; (d) 70.

Soluție. Folosind formula termenului general al binomului lui Newton, obținem

$$T_{k+1} = C_8^k \cdot \left(x^{-\frac{1}{6}}\right)^{8-k} \cdot \left(x^{\frac{1}{10}}\right)^k = C_8^k \cdot x^{\frac{k-8}{6} + \frac{k}{10}}.$$

Vom avea deci

$$\frac{k-8}{6} + \frac{k}{10} = 0,$$

de unde $k = 5$. Atunci termenul va avea valoarea $C_8^5 = 56$.

Răspuns corect: (b).

□

8. Se consideră numerele complexe

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}, \\ z_2 &= \cos \frac{7\pi}{12} - i \sin \frac{7\pi}{12}. \end{aligned}$$

Atunci modulul numărului complex $z_1 + z_2$ are valoarea:

(a) 1; (b) 2; (c) $\sqrt{2}$; (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Soluție. Vom folosi formulele

$$\begin{aligned} \sin a - \sin b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}, \\ \cos a + \cos b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}. \end{aligned}$$

Atunci

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= \left(\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{7\pi}{12} \right) + i \left(\sin \frac{\pi}{12} - \sin \frac{7\pi}{12} \right) \\ &= 2 \cos \frac{\frac{\pi}{12} + \frac{7\pi}{12}}{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{12} - \frac{7\pi}{12}}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{12} - \frac{7\pi}{12}}{2} \right) \\ &= 2 \cos \frac{\pi}{3} \left(\cos \frac{-\pi}{4} + i \sin \frac{-\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Atunci

$$|z_1 + z_2| = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 1.$$

Răspuns corect: (a).

□

9. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este un parametru real. Dacă rangul matricei este 2, atunci suma elementelor matricei A are valoarea:

(a) 15; (b) -3 ; (c) 9; (d) 3.

Soluție. Vom avea

$$\det A = -a^3 + 2a^2 - a = -a(a-1)^2,$$

care are rădăcinile 0 și 1. Pentru $a = 1$, se observă imediat că $\text{rang } A = 1$, deci $a = 0$. Atunci suma căutată va fi 3.

Răspuns corect: (d). □

10. Produsul parametrilor $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ mx + 2y + 3z = 0 \\ m^2x + 4y + 9z = 0 \end{cases}$$

este compatibil nedeterminat are valoarea:

(a) 6; (b) 5; (c) 2; (d) 0.

Soluție. Sistemul este compatibil nedeterminat dacă și numai dacă $\det A = 0$, unde A este matricea coeficienților. Atunci

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 2 & 3 \\ m^2 & 2^2 & 3^2 \end{vmatrix} = (2-m)(3-m)(3-2) = 0,$$

deci $m \in \{2, 3\}$.

Răspuns corect: (a). □

11. Se consideră grupul comutativ $(\mathbb{R} \setminus \{2021\}, *)$, unde $*$ este legea de compoziție:

$$x * y = (x - 2021)(y - 2021) + 2021.$$

Atunci simetricul elementului 2020 în grupul considerat este:

(a) $\frac{1}{2020}$; (b) 2020; (c) -2020 ; (d) 2022.

Soluție. Obținem elementul neutru $e = 2022$. Atunci

$$\begin{aligned} 2020 * y &= 2022, \\ -(y - 2021) + 2021 &= 2022, \\ y &= 2020. \end{aligned}$$

Răspuns corect: (b). □

12. Fie şirul cu termenul general

$$x_n = (-1)^n \sin \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci:

- (a) (x_n) este mărginit şi monoton;
- (b) (x_n) are limita 0;
- (c) (x_n) este nemărginit;
- (d) (x_n) are limita 1.

Soluţie. Cum $\sin \frac{1}{n} \rightarrow 0$ pentru $n \rightarrow \infty$, iar şirul $\{(-1)^n\}_n$ este mărginit, obţinem uşor că $x_n \rightarrow 0$.

Răspuns corect: (b). □

13. Valoarea limitei

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2021} + \dots + \frac{(-1)^n}{2021^n} \right)$$

este:

- (a) $\frac{2021}{2022}$; (b) 2021; (c) $\frac{2022}{2021}$; (d) $\frac{2020}{2022}$.

Soluţie. Să observăm că suma din paranteză este suma primilor $n+1$ termeni ai progresiei geometrice cu raţia $-\frac{1}{2021}$. Atunci

$$1 - \frac{1}{2021} + \dots + \frac{(-1)^n}{2021^n} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2021}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{2021}\right)} \rightarrow \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2021}\right)} = \frac{2021}{2022}.$$

Răspuns corect: (a). □

14. Valoarea limitei

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x \cos x}$$

este:

- (a) 0; (b) 2; (c) ∞ ; (d) 1.

Soluţie. Se aplică regula lui l'Hôpital şi obţinem limita egală cu 1.

Răspuns corect: (d). □

15. Care dintre afirmațiile de mai jos este adevărată pentru funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$?

- (a) Pentru $x < e\sqrt{e}$, funcția f este convexă și, pentru $x > e\sqrt{e}$, funcția f este concavă;
- (b) Pentru $x > e\sqrt{e}$, funcția f este convexă și, pentru $x < e\sqrt{e}$, funcția f este concavă;
- (c) Pentru $x > e$, funcția f este convexă și, pentru $x < e$, funcția f este concavă;
- (d) Pentru $x < e$, funcția f este convexă și, pentru $x > e$, funcția f este concavă.

Soluție. Funcția este de două ori derivabilă pe $(0, \infty)$ și avem

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

$$f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}.$$

Atunci $f''(x) \geq 0$ pentru $x \geq e\sqrt{e}$.

Răspuns corect: (b). □

16. Valoarea lui $a > 0$ pentru care asimptotele funcției $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{ax^2 + 1}{x}$$

fac între ele un unghi de 45° este:

- (a) $\sqrt{3}$; (b) 1; (c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; (d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soluție. Constatăm că f are asimptotă verticală la dreapta în 0 de ecuație $x = 0$ și asimptotă oblică la $+\infty$ de ecuație $y = ax$. Atunci unghiul dintre cele două asimptote este de 45° doar dacă $a = 1$.

Răspuns corect: (b). □

17. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

și $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ primitiva funcției f care satisface $F(0) = 0$. Atunci $F(1)$ este egală cu:

- (a) $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$; (b) $\frac{\ln 2}{2}$; (c) $\frac{\pi}{4}$; (d) $\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$.

Soluție. Calculăm, prin metoda integrării prin părți, primitivele lui f :

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arctg} x \, dx &= \int x' \cdot \operatorname{arctg} x \, dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx \\ &= x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \end{aligned}$$

Primitiva lui f care satisface $F(0) = 0$ este așadar

$$F(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2),$$

pentru care $F(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

Răspuns corect: (a). □

18. Valoarea integralei

$$\int_{\sqrt{3}}^3 \frac{9}{x^4 + 9x^2} dx$$

este:

(a) $\frac{\sqrt{3}-1}{3} - \frac{\pi}{36}$; (b) $\frac{\sqrt{3}-1}{3} - \frac{\pi}{12}$;
 (c) $\frac{6\sqrt{3}-2}{27} - \frac{\pi}{36}$; (d) $\frac{\sqrt{3}-1}{3} - \ln \frac{3}{2}$.

Soluție. Vom avea

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{9}{x^4 + 9x^2} dx &= \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{(x^2 + 9) - x^2}{x^2(x^2 + 9)} dx = \int_{\sqrt{3}}^3 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 + 9} \right) dx \\ &= -\frac{1}{x} \Big|_{\sqrt{3}}^3 - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} \Big|_{\sqrt{3}}^3 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \left(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{3} - \frac{\pi}{36}. \end{aligned}$$

Răspuns corect: (a). □

19. Valoarea limitei

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_{2021}^x \sin \frac{1}{t} dt}{\ln x}$$

este:

(a) 1; (b) $\frac{1}{2}$; (c) 0; (d) 2021.

Soluție. Pornim de la faptul că $F(x) = \int_{2021}^x \sin \frac{1}{t} dt$ este o primitivă a funcției $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ pe $(0, \infty)$. Atunci limita căutată este

$$\ell = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{\ln x}$$

de unde, aplicând regula lui l'Hôpital, obținem

$$\ell = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F'(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1.$$

Răspuns corect: (a). □

20. În $\triangle ABC$ bisectoarea $\sphericalangle A$ intersectează latura BC în D . Știind că $AB = 2020$ și $AC = 2021$, raportul ariilor triunghiurilor ACD și ABD are valoarea:

- (a) $\frac{2021^2}{2020^2}$; (b) $\frac{2020}{2021}$; (c) $\frac{2021}{2020}$; (d) $\frac{2020^2}{2021^2}$.

Soluție. Folosim teorema bisectoarei și obținem, notând cu AE înălțimea care pleacă din vârful A :

$$\frac{\mathcal{A}_{ACD}}{\mathcal{A}_{ABD}} = \frac{\frac{AE \cdot CD}{2}}{\frac{AE \cdot BD}{2}} = \frac{CD}{BD} = \frac{2021}{2020}.$$

Răspuns corect: (c). □

21. Fie $\mathcal{C}$ cercul cu centrul în punctul $A(1, 1)$, tangent la axele de coordonate. Distanța maximă față de origine a unui punct de pe cercul $\mathcal{C}$ are valoarea:

- (a) $\sqrt{2} + 1$; (b) $\sqrt{3}$; (c) $\sqrt{5}$; (d) $\sqrt{2} - 1$.

Soluție. Se realizează figura geometrică și se observă că punctul unde se obține distanța maximă este cel în care cercul intersectează prima bisectoare, notat de exemplu cu M . Atunci $OM = OA + AM = \sqrt{2} + 1$.

Răspuns corect: (a). □

22. Se consideră punctele $A(4, 7)$, $B(2, 4)$, $C(5, 3)$. Dreapta care trece prin punctul A și este perpendiculară pe BC are ecuația:

- (a) $3x + 5y - 1 = 0$; (b) $3x - y - 5 = 0$;
(c) $x + 7y - 2 = 0$; (d) $3x + 5y - 18 = 0$.

Soluție. Dreapta BC are ecuația

$$\frac{x - 2}{5 - 2} = \frac{y - 4}{3 - 4} \Leftrightarrow y = -\frac{x}{3} + \frac{14}{3}.$$

Atunci dreapta care trece prin punctul A și este perpendiculară pe BC are panta $m = \frac{-1}{m_{BC}} = 3$. Atunci ecuația acestei drepte va fi

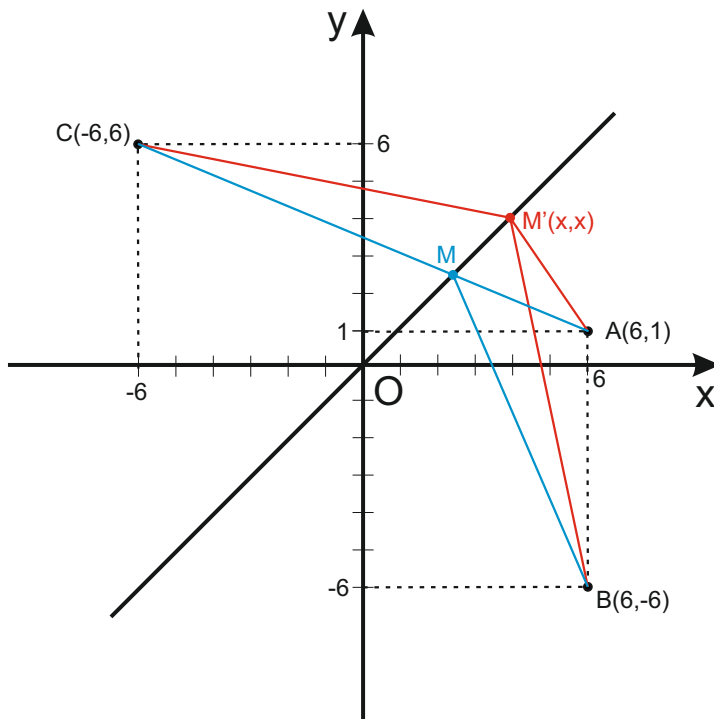
$$y - y_A = m(x - x_A) \Leftrightarrow y - 7 = 3(x - 4).$$

Răspuns corect: (b). □

23. Se dau punctele $A(6, 1)$, $B(6, -6)$ și $M(x, x)$, cu $x \in \mathbb{R}$. Valoarea minimă a sumei $|AM| + |MB|$ este:

- (a) $12\sqrt{2}$; (b) 13; (c) 12; (d) 9.

Soluție. Să observăm figura de mai jos:



Constatăm că, dacă $M(x, x)$ este un punct oarecare pe prima bisectoare, atunci $|CM| = |BM|$, unde C este punctul de coordonate $(-6, 6)$. Atunci suma $|AM| + |MB|$ este minimă dacă și numai dacă $|AM| + |MC|$ este minimă. Ultima sumă este minimă dacă punctele A, M, C sunt coliniare, caz în care valoarea sa este $|AC| = 13$.

Răspuns corect: (b). □

24. Dacă $z \in \mathbb{C}^*$ este o rădăcină a ecuației $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \frac{\pi}{2021}$, atunci $z^{2021} + \frac{1}{z^{2021}}$ are valoarea:

- (a) 1; (b) 2; (c) -2 ; (d) 0.

Soluție. Să constatăm că prima relație din enunț este echivalentă cu

$$z^2 - 2 \cos \frac{\pi}{2021} z + 1 = 0,$$

care are soluțiile complexe

$$z_{1,2} = \cos \frac{\pi}{2021} \pm i \sin \frac{\pi}{2021},$$

care satisfac

$$z_1 = \frac{1}{z_2}.$$

Atunci suma $z^{2021} + \frac{1}{z^{2021}}$ este aceeași pentru z_1 și pentru z_2 , și are valoarea

$$z_1^{2021} + z_2^{2021} = (\cos \pi + i \sin \pi) + (\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)) = -2.$$

Răspuns corect: (c).

□

25. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1}{2} \\ \cos x + \cos y = 1. \end{cases}$$

Atunci $\cos(x - y)$ are valoarea:

$$(a) -\frac{3}{8}; \quad (b) \frac{1}{8}; \quad (c) -\frac{3}{4}; \quad (d) \frac{3}{8}.$$

Soluție. Ridicăm ambele relații la pătrat și obținem

$$\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y + 2 \sin x \sin y = \frac{1}{4} \\ \cos^2 x + \cos^2 y + 2 \cos x \cos y = 1. \end{cases}$$

Sumând relațiile, obținem

$$2 + 2 \cos(x - y) = \frac{5}{4},$$

de unde $\cos(x - y) = -\frac{3}{8}$.

Răspuns corect: (a).

□