

LUCRARE SCRISĂ LA MATEMATICĂ  
VARIANTA II

1. Fie ecuația  $x^2 - x + m + 1 = 0$ . Valoarea parametrului  $m \in \mathbf{R}$  pentru care are loc relația  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$  este:  
**a)**  $m = 0$ ; **b)**  $m = 1$ ; **c)**  $m = -1$ ; **d)**  $m = 2$ ; **e)**  $m = -2$ .
2. Fie familia de funcții de gradul doi  $f_m: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f_m(x) = mx^2 + 2(m-1)x + m - 1$ ,  $m \neq 0$ . Vârfurile parabolilor  $P_m$  asociate funcțiilor  $f_m$  se găsesc pe dreapta:  
**a)**  $x + y = 0$ ; **b)**  $x - y = 0$ ; **c)**  $x + y = 1$ ; **d)**  $2x + y = 0$ ; **e)**  $x + y = 2$ .
3. Fie  $A(1;2)$ ,  $B(2;5)$ ,  $C(3;m)$ . Valoarea parametrului  $m \in \mathbf{R}$  astfel încât  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5$ , este:  
**a)**  $m = 3$ ; **b)**  $m = -6$ ; **c)**  $m = 10$ ; **d)**  $m \in \Phi$ ; **e)**  $m = 0$ .
4. Valoarea parametrului real  $\alpha$  pentru care dreptele  $(d_1): \alpha x + (\alpha - 1)y - 3 = 0$  și  $(d_2): 2x - (\alpha + 1)y + 1 = 0$  sunt paralele, este:  
**a)**  $\alpha \in \left\{ \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \right\}$ ; **b)**  $\alpha \in \left\{ -\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right\}$ ; **c)**  $\alpha \in \{-1; 2\}$ ; **d)**  $\alpha \in \Phi$ ; **e)**  $\alpha = 2$ .
5. Dacă  $\log_3 2 = a$  și  $\log_3 5 = b$ , atunci  $\log_3 20$  este:  
**a)**  $2a + b$ ; **b)**  $2a - b$ ; **c)**  $2ab$ ; **d)**  $a + b$ ; **e)**  $a - b$ .
6. Rangul termenului din dezvoltarea  $\left( \sqrt[5]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{21}$  în care nu apare  $x$ , este:  
**a)**  $T_7$ ; **b)**  $T_9$ ; **c)**  $T_8$ ; **d)**  $T_6$ ; **e)**  $T_{10}$ .
7. Fie  $z_1 = 1 - m + i$  și  $z_2 = m + 1 - 2mi$ , unde  $i^2 = -1$ . Valorile lui  $m \in \mathbf{R}$  pentru care  $z_1 \cdot z_2 \in \mathbf{R}$  sunt:  
**a)**  $m \in \Phi$ ; **b)**  $m \in \{1; 2\}$ ; **c)**  $m \in \{-1; 5\}$ ; **d)**  $m \in \{0; 2\}$ ; **e)**  $m \in \{-3; -2\}$ .
8. Dacă  $\cos \alpha = -\frac{1}{5}$  și  $\alpha \in \left( \pi, \frac{3\pi}{2} \right)$ , atunci  $\sin \alpha$  are valoarea:  
**a)**  $-\frac{2\sqrt{6}}{5}$ ; **b)**  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; **c)**  $-\frac{1}{2}$ ; **d)**  $\frac{1}{2}$ ; **e)**  $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ .
9. Fie ecuația  $x^3 + x + 1 = 0$ . Atunci valoarea determinantului  $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}$  este:  
**a)**  $\Delta = 0$ ; **b)**  $\Delta = 1$ ; **c)**  $\Delta = -1$ ; **d)**  $\Delta = 2$ ; **e)**  $\Delta = -2$ .
10. Ecuația  $2^x(x^2 + 1) - 3 = 0$  are soluție în intervalul:  
**a)**  $(0; 1)$ ; **b)**  $(-1; 0)$ ; **c)**  $(3; \infty)$ ; **d)**  $(2; 3)$ ; **e)**  $(-2; -1)$ .
11. Valorile parametrilor reali  $m$  și  $n$  astfel încât ecuația  $x^3 + x^2 + mx - n = 0$  să admită rădăcina dublă  $x = -1$  sunt:  
**a)**  $m = -1, n = 1$ ; **b)**  $m = -2, n = -1$ ; **c)**  $m = n = 1$ ; **d)**  $m = 1, n = -1$ ; **e)**  $m = -1, n = 2$ .
12. Valorile parametrului  $m \in \mathbf{R}$  pentru care ecuația  $4x^3 - 3x + 1 - m = 0$  admite toate soluțiile reale distincte, sunt:  
**a)**  $m \in (0; 2)$ ; **b)**  $m \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ ; **c)**  $m \in (-1; 0)$ ; **d)**  $m \in (0; 1)$ ; **e)**  $m \in \Phi$ .

13. Valoarea limitei  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$  este:

- a)  $\frac{1}{3}$ ;      b) 0;      c)  $\infty$ ;      d) 3;      e) 1.

14. Rezultatul integralei  $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx$  este:

- a)  $\frac{3}{2}$ ;      b) 2;      c) -2;      d) 1;      e) -1.

15. Volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției  $f : [0; 3] \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \sqrt{\frac{x(x-3)}{x-4}}$  în jurul axei Ox este:

- a)  $\pi \left( \frac{15}{2} - 8 \ln 2 \right)$ ;    b)  $\pi \left( \frac{7}{2} - 8 \ln 2 \right)$ ;    c)  $\pi \left( \frac{3}{2} - 8 \ln 2 \right)$ ;    d)  $\pi \left( \frac{15}{2} + 8 \ln 2 \right)$ ;    e)  $\pi \left( \frac{15}{2} + 2 \ln 2 \right)$ .

**Rezolvare subiect matematică**  
**Varianta II**

1.

$$S = -\frac{b}{a} = 1;$$

$$P = \frac{c}{a} = m + 1;$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{m+1} = 1 \Rightarrow m = 0.$$

2.

$$\left. \begin{aligned} x_v &= -\frac{b}{2a} = \frac{1-m}{m} \\ y_v &= -\frac{\Delta}{4a} = \frac{m-1}{m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_v + y_v = 0.$$

Ecuatia dreptei pe care se găsesc vârfurile parabolilor  $P_m$  asociate funcțiilor  $f_m$  este  $x + y = 0$ .

3.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \vec{i} + 3\vec{j} \\ \overrightarrow{AC} &= 2\vec{i} + (m-2)\vec{j} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3m - 4;$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \Leftrightarrow 3m - 4 = 5 \Rightarrow m = 3.$$

4.

$$(d_1): \alpha x + (\alpha - 1)y - 3 = 0; m_{d_1} = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

$$(d_2): 2x - (\alpha + 1)y + 1 = 0; m_{d_2} = \frac{2}{\alpha + 1}$$

$$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_{d_1} = m_{d_2} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{1 - \alpha} = \frac{2}{\alpha + 1} \Rightarrow \alpha^2 + 3\alpha - 2 = 0; \alpha \in \left\{ \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \right\}.$$

5.

$$\log_3 20 = \log_3 (4 \cdot 5) = \log_3 4 + \log_3 5 = \underbrace{2\log_3 2}_a + \underbrace{\log_3 5}_b = 2a + b.$$

6.

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k = C_{21}^k \cdot \left(x^{\frac{1}{5}}\right)^{21-k} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^k = C_{21}^k \cdot x^{\frac{21-k}{5} - \frac{k}{2}}; \frac{21-k}{5} - \frac{k}{2} = 0 \Rightarrow k = 6.$$

Rangul termenului din dezvoltare în care nu apare  $x$  este  $T_7$ .

7.

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= 1 - m + i \\ z_2 &= m + 1 - 2mi \end{aligned} \right\} \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = 1 + 2m - m^2 + (2m^2 - m + 1)i;$$

$$z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow 2m^2 - m + 1 = 0; \Delta < 0 \Rightarrow m \in \Phi.$$

8.

$$\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin \alpha < 0;$$

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{25}} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

9. Relațiile lui Viete: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1; \\ x_1x_2x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & x_2 & x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 & x_1 & x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = 0.$$

10. Fie  $f(x) = 2^x(x^2 + 1) - 3$ .

$$\left. \begin{matrix} f(0) = -2 \\ f(1) = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(0) \cdot f(1) \leq 0 \Rightarrow \text{soluția se găsește în intervalul } (0;1).$$

11.  $x = -1$  rădăcină dublă  $\Leftrightarrow f(-1) = f'(-1) = 0$ .

$$f(-1) = 0 \Leftrightarrow m + n = 0$$

$$f'(-1) = 0 \Leftrightarrow 1 + m = 0$$

$$\begin{cases} m + n = 0 \\ 1 + m = 0 \end{cases} \Rightarrow m = -1, n = 1.$$

12.  $f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^3 - 3 = 0; x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}$

|        |           |                        |                       |           |
|--------|-----------|------------------------|-----------------------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$         | $\frac{1}{2}$         | $+\infty$ |
| $f(x)$ | -         | $\underbrace{2-m}_{+}$ | $\underbrace{-m}_{-}$ | +         |

Ecuția admite toate rădăcinile reale, distincte:  $\begin{cases} 2 - m > 0 \\ -m < 0 \end{cases} \Rightarrow m \in (0;2).$

13.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^3} \stackrel{I'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} \stackrel{I'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{-2} 2x}{6x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{3}.$

14.  $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x};$

$$x_1 = e \Rightarrow t_1 = 1;$$

$$x_2 = e^2 \Rightarrow t_2 = 2;$$

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^2 t dt = \left. \frac{t^2}{2} \right|_1^2 = \frac{3}{2}.$$

15.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^3 f^2(x) dx = \pi \int_0^3 \frac{x(x-3)}{x-4} dx = \pi \int_0^3 \left( x + 1 + \frac{4}{x-4} \right) dx \\ &= \pi \left( \frac{x^2}{2} + x + 4 \ln|x-4| \right) \Big|_0^3 = \pi \left( \frac{15}{2} - 8 \ln 2 \right). \end{aligned}$$