

Examenul de bacalaureat național 2017

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

• Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

• Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| 5p | 1. Arătați că $\frac{2+i}{2-i} + \frac{2-i}{2+i} = \frac{6}{5}$, unde $i^2 = -1$. |
| 5p | 2. Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - (2m+3)x + m^2 + 3m + 2 = 0$. Arătați că $(x_1 - x_2)^2 = 1$, pentru orice număr real m . |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-3} = 5 - x$. |
| 5p | 4. Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma doar cu cifre pare. |
| 5p | 5. Se consideră triunghiul ABC și punctele M , N și P , mijloacele laturilor AB , BC , respectiv AC . Demonstrați că $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BP}$. |
| 5p | 6. Determinați numerele reale x , știind că $\sin 2x = \cos x$ și $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| | 1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ x + 3y + az = 2 \end{cases}$, unde a este număr real. |
| 5p | a) Arătați că $\det(A(a)) = (a+1)(a-3)$, pentru orice număr real a . |
| 5p | b) Determinați numerele reale m pentru care $A(m)A(2-m) = A(2-m)A(m)$. |
| 5p | c) Determinați numerele întregi a pentru care sistemul are soluție unică (x_0, y_0, z_0) , iar x_0 , y_0 și z_0 sunt numere întregi. |
| | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = -5xy + 10x + 10y - 18$. |
| 5p | a) Arătați că $x * y = 2 - 5(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y . |
| 5p | b) Determinați numerele naturale n , știind că $(n * n) * n = n$. |
| 5p | c) Arătați că, dacă $a * a = b$ și $b * b = a$, atunci $a = b = 2$ sau $a = b = \frac{9}{5}$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| | 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$. |
| 5p | a) Determinați intervalele de monotonie a funcției f . |
| 5p | b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^{2x} = \frac{1}{e^2}$. |
| 5p | c) Demonstrați că pentru orice număr real a , $a \in (-\sqrt{2}, -1)$, ecuația $f(x) = a$ are exact două soluții reale distincte. |

2. Se consideră funcția $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ și, pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = 2(\sqrt{2} - 1)$.

5p b) Demonstrați că $I_n \leq \frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n .

5p c) Demonstrați că $(2n+1)I_n = 2\sqrt{2} - 2nI_{n-1}$, pentru orice număr natural n , $n \geq 2$.