

Concursul de admitere iulie 2022

I. Algebră. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

- (a) Arătați că determinantul matricei A este egal cu 0. Calculați rangul matricei A .
- (b) Demonstrați că $A^3 = -A$ și că $A^5 + A^3 = O_3$, unde $O_3 \in M_3(\mathbb{R})$ este matricea nulă.
- (c) Considerăm sistemul omogen

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases}$$

a cărui matrice este A . Determinați acea soluție (x_0, y_0, z_0) a acestui sistem, cu toate componentele numere reale, pentru care suma $(x_0 - 1)^2 + (y_0 - 1)^2 + (z_0 - 1)^2$ ia cea mai mică valoare posibilă.

- (d) Demonstrați că mulțimea $G = \{A, A^2, A^3, A^4\}$ este grup în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

II. Analiză. Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, -3\} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \ln(|x^2 + 4x + 3|)$.

- (a) Demonstrați că dreapta de ecuație $x = -1$ este asimptotă verticală la graficul funcției f . Precizați dacă graficul funcției f mai are și alte asimptote.
- (b) Determinați intervalele de convexitate ale funcției f .
- (c) Calculați $\int_0^2 f(x) dx$.
- (d) Definim șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ prin

$$x_n = f'(1) - f'(2) + \dots + f'(2n-1) - f'(2n).$$

Demonstrați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

III. Geometrie. În planul de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 0)$, $B(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ și $C(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

- (a) Arătați că triunghiul ABC este echilateral.
- (b) Determinați raza cercului circumscris triunghiului ABC precum și coordonatele centrului acestui cerc.
- (c) Calculați $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ și $|2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}|$.
- (d) În interiorul triunghiului ABC se consideră cinci puncte. Arătați că există cel puțin două dintre ele aflate la distanța mai mică decât $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

INFORMATICĂ – Varianta 4

1. Considerăm următorul algoritm, în care A este o matrice pătratică cu elemente numere întregi ($x \bmod y$ reprezintă restul împărțirii lui x la y):

```
citește n (număr natural nenul)
pentru i ← 1, n execută
    pentru j ← 1, n execută
        dacă i ≥ j
            atunci
                A[i,j] ← i mod j
            altfel
                A[i,j] ← j mod i
    ■
■
pentru i ← 1, n execută
    pentru j ← 1, n execută
        scrie A[i,j]
    ■
■
```

Dacă pentru n se va citi valoarea 12, câte valori nule vor fi afișate?

- A) 70 B) 12 C) 46 D) 58

2. Fie secvența în pseudocod ($x \div y$ și $x \bmod y$ reprezintă câtul și restul împărțirii lui x la y):

```
cnt ← 0
pentru i ← 1, 1022 execută
    x ← i
    cât timp x ≠ 0 execută
        cnt ← cnt + x mod 2
        x ← x div 2
    ■
scrie cnt
```

Ce valoare va fi afișată?

- A) 5106 B) 4868 C) 5110 D) 4956

3. Fie A o matrice pătratică. Se consideră secvența scrisă în pseudocod ($x \div y$ reprezintă câtul împărțirii lui x la y):

```
n ← 22; val ← 0
pentru k ← 1, (n+1) div 2 execută
    pentru i ← k, n-k execută
        val ← val+1
        A[k,i] ← val
    ■
    pentru i ← k, n-k execută
        val ← val+1
        A[i,n-k+1] ← val
    ■
    pentru i ← n-k+1, k, -1 execută
        val ← val+1
        A[n-k+1,i] ← val
    ■
    pentru i ← n-k, k+1, -1 execută
        val ← val+1
        A[i,k] ← val
    ■
■
```

Ce valoare are elementul A[18][18] după executarea secvenței de cod date?

- A) 427 B) 400 C) 174 D) 315

4. Considerăm următoarea funcție recursivă:

Limbajele C/C++	Limbajul Pascal
<pre> int f(int n, int a, int b) { if(n == 0) return 0; if(a > n % 10) a = n % 10; if(b < n % 10) b = n % 10; return b - a + f(n/10, a, b); } </pre>	<pre> function f(n,a,b:longint):integer; begin if n = 0 then f := 0 else begin if a > n mod 10 then a := n mod 10; if b < n mod 10 then b := n mod 10; f := b - a + f(n div 10, a, b); end; end; end; </pre>

Ce valoare va furniza funcția în urma apelului $f(214354322, 10, -1)$?

- A) 7 B) 15 C) 19 D) 20

5. Fie v un vector format din n numere întregi și indexat de la 1, având următoarele proprietăți:

- v are elementele ordonate strict crescător;
- numărul 22 nu se află în vectorul v ;
- dacă se execută algoritmul de tip căutare binară de mai jos pentru vectorul v și valoarea $x = 22$, atunci la terminarea algoritmului valoarea variabilei cnt va fi egală cu 10 ($x \div y$ reprezintă câtul împărțirii lui x la y).

```

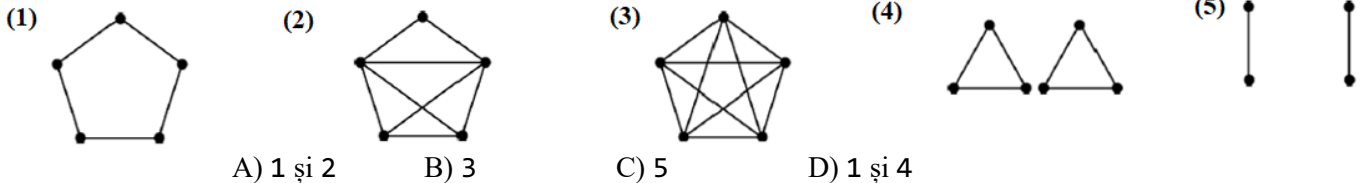
st ← 1; dr ← n; x ← 22
cnt ← 0
cât timp st ≤ dr execută
    cnt ← cnt+1
    mij ← (st+dr) div 2
    dacă v[mij] = x
        atunci
            st ← dr+1
        altfel
            dacă x < v[mij]
                atunci
                    dr ← mij-1
                altfel
                    st ← mij+1

```

Care este valoarea maximă a lungimii n a unui vector de acest tip?

- A) 2^{10} B) $2^{11} - 2$ C) $2^{10} + 2^9 - 2$ D) $2^{10} - 1$

6. Fie afirmația: „Orice graf conex conține cel puțin un nod ce are gradul 2”. Care din următoarele grafuri constituie contraexemplu/contraexemple pentru această afirmație?



7. Considerăm vectorul $v = [4, 3, -10, 3, -1, 2, 0, -3, 5, 7, -4, -8, -10, 4, 7, -30, -2, -6, 4, 7]$. Care este suma maximă a unei secvențe $v[i], v[i+1], \dots, v[j]$ cu i și j doi indici valizi din v ?

- A) 12 B) 13 C) 14 D) 11

8. În următorul algoritm descris în pseudocod v este un vector de numere întregi, iar variabilele n, k, x, y, i, a și rez sunt de tip întreg:

```

citește  $n, x, y$ 
pentru  $i \leftarrow 1, n$  execută
     $v[i] \leftarrow i \cdot 10$ 
■
 $a \leftarrow v[x]; v[x] \leftarrow v[y]; v[y] \leftarrow a$ 
 $k \leftarrow 1; rez \leftarrow 0$ 
cât timp  $k=1$  execută
     $k \leftarrow 0$ 
     $i \leftarrow 1$ 
    cât timp  $i < n$  execută
        dacă  $v[i] > v[i+1]$  atunci
             $a \leftarrow v[i]; v[i] \leftarrow v[i+1]; v[i+1] \leftarrow a$ 
             $k \leftarrow 1$ 
        ■
         $i \leftarrow i+1$ 
         $rez \leftarrow rez+1$ 
    ■
■

```

Știind că valoarea citită pentru n este un număr natural mai mare strict decât 5, iar valorile citite pentru variabilele x și y sunt numere naturale din intervalul $[1, n]$ și valoarea lui x este mai mică strict decât cea a lui y , cu cât va fi egală valoarea variabilei rez la finalul executării algoritmului?

- A) $(n-1) \cdot (y-x)$ B) $(n-1) \cdot (y-x+1)$ C) $n \cdot (y-x+1)$ D) $(n-1) \cdot (y+1)$

9. Fie funcția definită astfel:

Limbaajele C/C++	Limbaajul Pascal
<pre> int f(int x) { if(x == 0) return 0; if(x % 2 == 0) return f(x/10) + 1; else return f(x/10) - 1; } </pre>	<pre> function f(x:integer):integer; begin if x = 0 then f:=0 else if x mod 2 = 0 then f:=f(x div 10) + 1 else f:=f(x div 10) - 1; end; </pre>

Pentru câte numere naturale nenule mai mici strict decât 1207 funcția returnează valoarea 0?

- A) 124 B) 118 C) 123 D) 125

10. Considerăm următorul algoritm scris în pseudocod:

```

citește  $n$  (număr natural nenul)
 $i \leftarrow 0; p \leftarrow 1$ 
cât timp  $i \leq n$  execută
     $j \leftarrow 1$ 
    cât timp  $j \leq p$  execută
        scrie  $j$ 
         $j \leftarrow j + 1$ 
    ■
     $i \leftarrow i + 1; p \leftarrow p \cdot 2$ 
■

```

Complexitatea algoritmului de mai sus este egală cu:

- A) $O(n \cdot p)$ B) $O(n^2)$ C) $O(n \cdot \log_2 n)$ D) $O(2^n)$

11. O adresă IP validă constă din patru numere întregi între 0 și 255 separate prin trei puncte. Un număr întreg nenul nu poate avea zerouri la început. De exemplu, "0.1.2.201" și "192.168.1.1" sunt adrese IP valide, dar "0.011.255.245" nu este validă. Fiind dat șirul $s = "201057"$, care este numărul de adrese IP valide posibile care pot fi formate prin inserarea de puncte în s , fără a rearanja sau elimina cifre din s ?

- A) 3 B) 4 C) 6 D) 5

12. Fie v un vector cu pozițiile numerotate de la 1 și n un număr natural strict mai mic decât numărul de elemente al vectorului. Se consideră următoarea secvență de pseudocod:

```

pentru  $i \leftarrow 1$ ,  $n$  execută
     $v[i] \leftarrow v[i] + 1$ 

```

Care din următoarele secvențe de pseudocod produc o schimbare identică a vectorului v cu cea produsă de secvența de mai sus?

(1) $i \leftarrow 0$
cât timp $i \leq n$ **execută**
 $i \leftarrow i + 1$
 $v[i] \leftarrow v[i] + 1$

(2) $i \leftarrow 1$
cât timp $i < n$ **execută**
 $v[i] \leftarrow v[i] + 1$
 $i \leftarrow i + 1$

(3) $i \leftarrow 0$
cât timp $i < n$ **execută**
 $v[i+1] \leftarrow v[i+1] + 1$
 $i \leftarrow i + 1$

(4) $i \leftarrow 0$
repetă
 $v[i+1] \leftarrow v[i+1] + 1$
 $i \leftarrow i + 1$
până când $i > n$

A) 2 și 3 B) 3 C) 4 D) 1 și 2

13. Fie $G_1 = (V, E_1)$ și $G_2 = (V, E_2)$ două grafuri neorientate, ambele având mulțimea nodurilor $V = \{1, 2, \dots, n\}$ cu $n > 4$, care verifică următoarea proprietate: pentru fiecare nod $i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ lista nodurilor adiacente cu i în G_1 coincide cu lista nodurilor adiacente cu i în G_2 . Care este cea mai mare valoare pe care o poate avea cardinalul mulțimii $(E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1)$?

A) 1 B) $2n-3$ C) $2n-4$ D) 0

14. În următorul algoritm descris în pseudocod variabilele rez , i și n sunt de tip întreg, iar v este un vector de numere întregi cu elementele aflate pe pozițiile de la 1 la n :

```

 $rez \leftarrow 0$ 
pentru  $i \leftarrow 1$ ,  $n-1$  execută
     $rez \leftarrow rez + v[i] * v[i+1]$ 

```

Dacă variabila n are valoarea 10, pentru câți vectori v cu 10 elemente din mulțimea $\{0, 1\}$ cu elementele pe pozițiile 1, 2, ..., 10 variabila rez va avea valoarea 0 la finalul executării algoritmului?

A) 144 B) 512 C) 256 D) 89

15. Considerăm următoarele cinci afirmații pentru un graf neorientat G :

- G este conex
- Numărul de componente conexe ale lui G este mai mare sau egal cu 1012
- G are cel puțin un nod de grad 0
- G are cel puțin un nod de grad 1
- G are cel puțin un nod de grad mai mare strict decât 1

Câte dintre cele 5 afirmații sunt adevărate pentru orice graf neorientat G având 2023 noduri cu proprietatea că matricea sa de adiacență are exact 2022 de valori egale cu 1?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 1

FIZICĂ – Varianta 4

1. Un rezistor este răcit de la temperatura de 100°C până la 0°C . Coeficientul de variație a rezistivității cu temperatura pentru materialul din care este confecționat rezistorul are valoarea $\alpha = 4 \times 10^{-3} \text{ grad}^{-1}$. Care dintre afirmațiile de mai jos este corectă?

A) Rezistența rezistorului scade de 1,4 ori	B) Rezistența rezistorului rămâne neschimbată	C) Rezistența rezistorului scade până la valoarea de $0,4 \Omega$	D) Rezistența rezistorului crește de 1,4 ori
---	---	---	--

2. Valoarea rezistenței electrice a unui rezistor este de 100Ω iar intensitatea curentului prin rezistor este de 2mA . Tensiunea între capetele rezistorului are valoarea:

A) 200V	B) 50V	C) 0,02V	D) 0,2V
---------	--------	----------	---------

3. Două becuri electrice sunt legate în paralel, gruparea fiind alimentată de o sursă de tensiune electromotoare. Becul care consumă mai multă energie electrică este:

A) Cel cu rezistența electrică mai mică	B) Cel care are sticla transparentă, nu mată	C) Cel cu rezistența electrică mai mare	D) Ambele becuri consumă aceeași energie
---	--	---	--

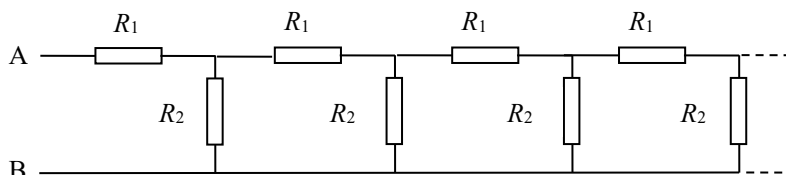
4. La bornele unei baterii cu tensiunea electromotoare E și rezistența internă r se conectează un rezistor cu rezistența R . În aceste condiții, dacă unim suplimentar capetele rezistorului cu un conductor de rezistență neglijabilă, tensiunea U între electrozii bateriei devine:

A) $U = \frac{Er}{R+r}$	B) $U = E$	C) $U = 0V$	D) $U = E - r \frac{E}{R+r}$
-------------------------	------------	-------------	------------------------------

5. Secțiunea unui conductor prin care trece un curent electric continuu este străbătută de o sarcină electrică de 10C într-un interval de timp de 2s . Valoarea medie a intensității curentului electric prin conductor este:

A) $I=5\text{A}$	B) $I=0,2\text{A}$	C) $I=12\text{A}$	D) $I=20\text{A}$
------------------	--------------------	-------------------	-------------------

6. Rezistența echivalentă R a circuitului infinit din figura alăturată între punctele A și B, pentru $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$ are valoarea:



A) $R=3\Omega$	B) $R=2\Omega$	C) $R=\sqrt{2}\Omega$	D) $R=\sqrt{3}\Omega$
----------------	----------------	-----------------------	-----------------------

7. Un reostat cu rezistență variabilă R este conectat la un generator cu tensiunea electromotoare E și rezistența internă r . Generatorul transferă aceeași putere reostatului atunci când valorile rezistenței variabile devin R_1 și, respectiv, R_2 . În aceste condiții, este adevărată relația:

A) $r = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}$	B) $r = \sqrt{R_1 R_2}$	C) $r = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$	D) $r = \frac{R_1 + R_2}{2}$
-------------------------------	-------------------------	------------------------------------	------------------------------

8. Un conductor are lungimea l , aria secțiunii transversale S constantă și rezistivitatea electrică ρ . Rezistența electrică a conductorului are expresia:

A) $R = \frac{\rho S}{l}$	B) $R = \frac{l}{\rho S}$	C) $R = \frac{S}{\rho l}$	D) $R = \frac{\rho l}{S}$
---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------

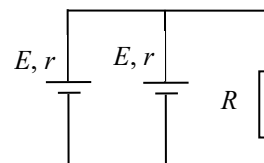
9. Doi rezistori fabricați din același metal au formă cubică, masele lor fiind m_1 , $m_2 = 8m_1$. Valoarea raportului R_1/R_2 al rezistențelor electrice măsurate între fețe opuse este:

A) $\frac{R_1}{R_2} = 2$	B) $\frac{R_1}{R_2} = 4$	C) $\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{4}$	D) $\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2}$
--------------------------	--------------------------	------------------------------------	------------------------------------

10. Puterea disipată pe o rezistență $R_1 = 10\Omega$ conectată la o baterie are valoarea $P_1 = 2,5W$. Pe o rezistență $R_2 = 90\Omega$, conectată la aceeași baterie, puterea disipată are valoarea $P_2 = 0,9W$. Tensiunea electromotoare E a bateriei și rezistența internă r a acesteia au valorile:

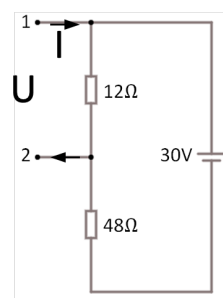
A) $E=20V$ $r=10\Omega$	B) $E=10V$ $r=20\Omega$	C) $E=10V$ $r=5\Omega$	D) $E=10V$ $r=10\Omega$
----------------------------	----------------------------	---------------------------	----------------------------

11. Două baterii identice, cu tensiunea electromotoare E și rezistența internă r , sunt legate în paralel, ca în figura alăturată, pe o rezistență R . Puterea disipată pe rezistență este maximă pentru o valoare a rezistenței egală cu:



A) $R = \frac{r}{2}$	B) $R = 2r$	C) $R = \frac{r}{4}$	D) $R = r$
----------------------	-------------	----------------------	------------

12. Între bornele 1 și 2 circuitul electric din figură are aceeași caracteristică $I-U$ ca o baterie cu tensiunea electromotoare E și rezistența internă r . Reamintim că prin caracteristică $I-U$ pentru două borne se înțelege dependența intensității curentului I prin cele două borne (vezi notația I și săgeata asociată schițată în figură) de tensiunea U între cele două borne. În circuitul din figură bateria este ideală. Valorile lui E și r sunt:

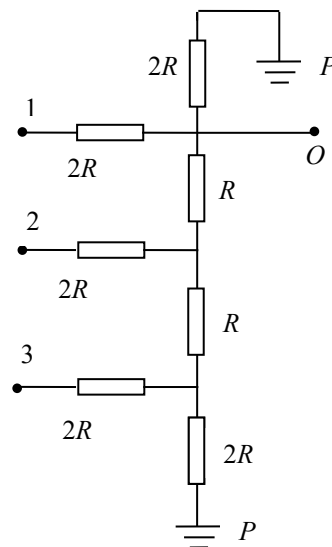


A) $E = 9V$ $r = 2\Omega$	B) $E = 3V$ $r = 1\Omega$	C) $E = 6V$ $r = 9,6\Omega$	D) $E = 4,5V$ $r = 0,5\Omega$
------------------------------	------------------------------	--------------------------------	----------------------------------

13. Rezistențele electrice pentru patru rezistori au valorile $R_1=10\Omega$, $R_2=20\Omega$, $R_3=50\Omega$ și $R_4=60\Omega$. Rezistența electrică echivalentă a grupării serie are valoarea:

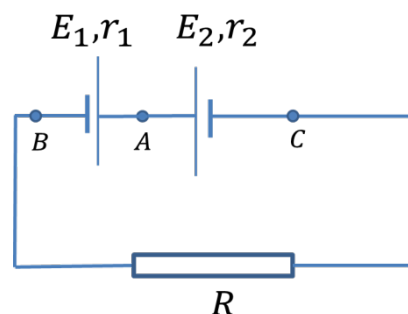
A) 28Ω	B) 200Ω	C) 100Ω	D) 140Ω
---------------	----------------	----------------	----------------

14. În circuitul electric din figura alăturată, tensiunile electrice între punctele 1, 2, 3 ale circuitului și referința P (reprezentată în figură prin simbolul $\equiv$) au valorile U_{1P} , U_{2P} , respectiv U_{3P} , cu $U_{1P} = U_{2P} = U_{3P} = 1V$. Tensiunea electrică U_{OP} între punctul O și referința P are valoarea:



A) $\frac{5}{12}V$	B) $\frac{3}{8}V$	C) $\frac{5}{9}V$	D) $\frac{7}{12}V$
--------------------	-------------------	-------------------	--------------------

15. În circuitul din figură se cunosc tensiunile electromotoare ale bateriilor E_1 , $E_2 = 3E_1$ și rezistențele lor interne r_1, r_2 . Ce expresie are tensiunea $U_{AB} = V_A - V_B$ între punctele A și B? Se neglijează rezistența conductoarelor de legătură.



A) $E_1 \frac{R+3r_1+r_2}{R+r_1+r_2}$	B) E_1	C) $-E_1$	D) $E_1 \frac{R-r_1+r_2}{R+r_1+r_2}$
---------------------------------------	----------	-----------	--------------------------------------

Variantă 4